Teoria degli insiemi

A. *Introduzione*

Nella seconda meta' del 1800 la matematica era cresciuta in maniera veramente eccezionale, ma in modo piuttosto disordinato: spesso i matematici non riuscivano a capire il modo di esprimersi dei loro colleghi, pertanto sorse la necessita' da un lato di pensare ai fondamenti della matematica per poter avere una base comune su cui costruire ed anche ad un linguaggio preciso e senza termini ambigui per poter procedere con chiarezza nelle varie discipline matematiche.
La Teoria degli insiemi nasce appunto per poter fornire una base comune di partenza a tutte le discipline matematiche.

B. *Teoria degli insiemi*

Teoria degli insiemi dovrebbe essere la base di tutte le matematiche: e' la disciplina che va studiata prima di tutte le altre che dovrebbero avvantaggiarsi del suo linguaggio e dei suoi concetti.

Purtroppo, dopo l'entusiasmo inziale, dagli inizi del 1900 l'importanza di teoria degli insiemi e' stata molto ridimensionata: da un lato i paradossi di Russel e la teoria dei sistemi formali hanno mostrati i limiti dell' insiemistica in particolare e della matematica in generale e dall'altro lato gli assiomi di Peano e i numeri di Gödel hanno posto l'aritmetica al centro della matematica.
Comunque, pur ridimensionata, l'importanza della teoria degli insiemi e' sempre fondamentale per fornire solide basi a tutte le discipline matematiche.

---

1. Concetto di insieme

Non e' possibile definire l'insieme: essendo uno dei concetti primitivi della matematica ognuno di noi dovrebbe possederlo e tale concetto dovrebbe essere lo stesso per ciascuno di noi. Comunque intuitivamente si puo' dire che quando abbiamo degli oggetti se riusciamo a considerarli collegati tra loro allora abbiamo un insieme. La prima cosa da dire e' che gli oggetti (elementi) che compongono l'insieme devono sempre essere ben definiti prima ancora di considerare l'insieme stesso.

Vediamo un po' di nomenclatura (simboli)

Useremo le lettere minuscole dell'alfabeto per indicare gli oggetti (elementi) di un insieme:

a b c d . . . .

Useremo le lettere maiuscole per indicare un insieme, ad esempio:

A sara' l'insieme ***A***

Per indicare un insieme utilizzeremo talvolta le parentesi graffe, come ad esempio:

{ a , b } insieme formato dagli elementi ***a*** e ***b***

Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme useremo il simbolo **∈ :**

$a \in A$ significa che l'elemento ***a*** appartiene all'insieme ***A.***

2. Rappresentazione di un insieme

Possiamo utilizzare vari modi per rappresentare un insieme.
Possiamo avere:

- Rappresentazione tabulare
- Rappresentazione mediante grafico
- Rappresentazione mediante caratteristica

a) Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare si ottiene enumerando gli oggetti entro parentesi graffe { }.

Per esempio, voglio considerare l'insieme **A** composto dai primi quattro numeri naturali:

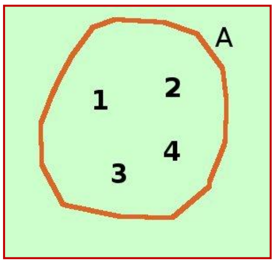
1 2 3 4

Posso scrivere

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

E' una rappresentazione che viene usata se l'insieme e' composto da un numero abbastanza limitato di oggetti.

b) Rappresentazione mediante grafici *(grafici di Eulero-Venn)*



Possiamo racchiudere gli oggetti che ci interessano entro una linea chiusa continua e non intrecciata come dalla figura qui a fianco che rappresenta sempre l'insieme **A** composto dai primi quattro numeri naturali:

1 2 3 4

c) Rappresentazione mediante caratteristica

Possiamo anche rappresentare l'insieme enunciando la caratteristica che tiene "assieme" gli oggetti.

Ad esempio posso caratterizzare l'insieme **A** delle pagine precedenti come l'insieme dei numeri naturali minori di **5:**

$$A = \{ x \in N : x < 5 \}$$

A e' l'insieme degli elementi appartenenti ad N tali che l' elemento sia minore di 5.
E' comoda da utilizzare quando gli oggetti dell'insieme sono parecchi.
Ecco come si legge quella strana formula simbolo per simbolo:

A	A
e'	=
l'insieme	{
degli elementi	x
appartenenti	$\in$
ad N	N
tali che	:
l'elemento	x
sia minore	<
di 5	5
chiuso insieme (non si legge)	}

3. Uguaglianza

Diremo che due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi (*attenzione!* l'ordine non conta). Ad esempio se:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \qquad \text{e:} \qquad B = \{ 3, 2, 1, 4 \}$$

Allora:
$$A = B$$

4. Sottoinsiemi di un insieme

Definiamo sottoinsieme di un insieme dato un nuovo insieme che abbia come elementi degli elementi presenti nell'insieme di partenza. Ad esempio dato:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

l'insieme:

$$B = \{ 1, 3 \}$$

e' un sottoinsieme dell'insieme A.

Dato un insieme definito mediante caratteristica per ottenerne un sottoinsieme, basta aggiungere una proprieta'; ad esempio, se considero l'insieme dei numeri naturali minori di **5** :

$$A = \{ x \in N : x < 5 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

ed aggiungo l'insieme dei numeri naturali minori di **5** e non divisibili per **2** ottengo:

$$B = \{ x \in N : x < 5; x \text{ non divisibile per } 2 \} = \{ 1, 3 \}$$

Per indicare che **B** e' sottoinsieme dell'insieme **A** useremo la notazione di inclusione:

$$B \subset A$$

che si legge: **“l'insieme B e' contenuto nell'insieme A”.**

Per indicare che **A** ha come sottoinsieme **B** useremo invece la notazione:

$$A \supset B$$

che si legge anche dicendo che **A** e' un sovrainsieme di **B** o che: **“l'insieme A contiene l'insieme B” .**

Pero' posso aggiungere una proprieta' impossibile, come ad esempio l'insieme dei numeri naturali minori di **5** e divisibili per **7;** ottengo un insieme senza elementi:

$$B = \{ x \in N : x < 5; x \text{ e' divisibile per } 7 \} = \emptyset$$

Ø sara' anche chiamato **insieme vuoto** ed e' un sottoinsieme per ogni insieme; basta aggiungere alla caratteristica dell'insieme una proprieta' impossibile.

Come abbiamo aggiunto una proprieta' impossibile, possiamo aggiungere una proprieta' ovvia e quindi otterremo come sottoinsieme l'insieme di partenza; esempio, se considero l'insieme dei numeri naturali minori di **5** e multipli di **1,** ottengo lo stesso insieme di partenza:

$$B = \{ x \in N : x < 5; x \text{ e' multiplo di } 1 \} = A$$

In questo caso, per indicare che considero l'insieme di partenza come sottoinsieme di se' stesso, lo chiamero' **sottoinsieme improprio**.

Siccome quando indicheremo genericamente un sottoinsieme di un insieme potrebbe trattarsi anche dell'insieme improprio, allora per considerare anche questa possibilita' indicheremo che B e' sottoinsieme di A in questo modo:

$B \subseteq A$ che si legge: **“l'insieme B e' contenuto od uguale all'insieme A”.**

5. Insieme delle parti *(Insieme potenza di un insieme)*

Definiamo ***Insieme delle parti di A*** oppure ***Insieme potenza di A***:

$$\mathcal{P}(A)$$

l'insieme di tutti i sottoinsiemi di **A.**

Esempio.

Se considero l'insieme:

$$A = \{ a, b \}$$

allora:

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$$

Considero prima l'insieme vuoto, poi gli insiemi formati da un elemento , poi gli insiemi formati da due elementi (nel nostro caso l'insieme improprio),...

Sono 4 elementi: 2^2 .

Vediamo un esempio con tre elementi:

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

allora:

$$P(A) = \{ ø, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \}$$

sono **8** elementi 2^3 .
Questo mi suggerisce la formula per trovare il numero degli elementi dell'insieme delle parti di un insieme con **n** elementi cioe' 2^n. Se vuoi approfondire:

Approfondimento sul numero degli elementi della potenza di un insieme e sua relazione con il triangolo di Tartaglia.
Non solo gli elementi della potenza di un insieme sono pari a 2^n ma corrispondono anche alla riga del triangolo di Tartaglia corrispondente al numero degli elementi.
Infatti consideriamo ad esempio la riga del triangolo di Tartaglia della potenza 4, essa vale:
1 4 6 4 1
Allora l'insieme potenza di un insieme con 4 elementi e' composto dai seguenti elementi:
1 insieme con 0 elementi (insieme vuoto)
4 insiemi con 1 elemento
6 insiemi con 2 elementi
4 insiemi con 3 elementi
1 insieme con 4 elementi (l'insieme improprio)
e la somma di tutti quanti vale:
$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
Come corollario ne deriva che la somma degli elementi di ogni riga del triangolo di Tartaglia e' una potenza del 2.

Vediamone l'esempio su un insieme di 4 oggetti:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Allora:

$$\begin{aligned} P(A) \quad = \quad & \{ ø, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \} \end{aligned}$$

Cerchiamo di capire il perche'. Siccome negli insiemi non conta l' ordine, cioe' {a,b}={b,a}, allora per trovare il numero di insiemi che posso formare con un insieme ad esempio di 4 elementi, devo considerare le combinazioni semplici di quattro elementi e precisamente:

Combinazione di classe 0 = $\binom{4}{0} = 1$ $\quad ø$

Combinazione di classe 1 = $\binom{4}{1} = 4$ $\quad \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

Combinazione di classe 2 = $\binom{4}{2} = 6$ $\quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

Combinazione di classe 3 = $\binom{4}{3} = 4$ $\quad \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$

Combinazione di classe 4 = $\binom{4}{4} = 1$ $\quad \{1, 2, 3, 4\}$

Ma abbiamo visto nel calcolo combinatorio che le combinazioni su **n** oggetti non sono altro che i coefficienti dello sviluppo del binomio, cioe' i termini della riga corrispondente del triangolo di Tartaglia; quindi abbiamo una stretta corrispondenza fra righe del triangolo di Tartaglia ed elementi dell' insieme potenza di un insieme.

6. Operazioni fra insiemi

Vediamo ora le possibili operazioni fra insiemi e le relative proprieta':

a) Unione

L'***unione*** fra due insiemi e' l'operazione che associa ai due insiemi l'insieme i cui elementi appartengono al primo **oppure** al secondo insieme.
Si indica come

$A \cup B$ (si legge "A unione B")

Vediamo un esempio:

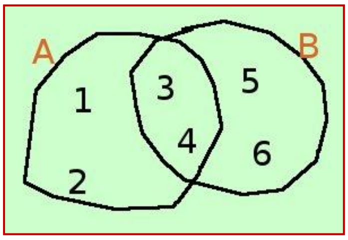
In rappresentazione tabulare.
Dati gli insiemi:

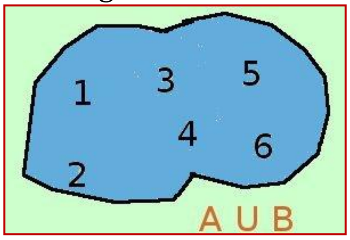
$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Devo prendere tutti gli elementi che appartengono ad A **o** che appartengono a B.

Vediamo mediante i diagrammi





(in azzurro l'insieme *unione*)

Mediante caratteristica:

$$A = \{x \in N : x < 5\}$$
$$B = \{x \in N : 2 < x < 7\}$$
$$A \cup B = \{x \in N : x < 5 \text{ o } 2 < x < 7\}$$

la **o** sta per oppure (non disgiuntivo) cioe' o l'uno oppure anche l'altro.

b) Intersezione

L'intersezione fra due insiemi e' l'operazione che associa ai due insiemi l'insieme i cui elementi appartengono contemporaneamente al primo **e** al secondo insieme. Si indica come:

$A \cap B$ (si legge "A intersezione B")

Esempio:

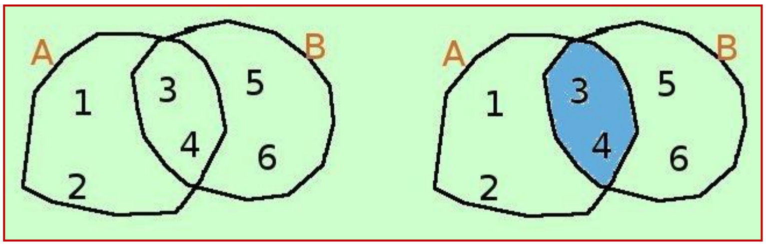
In rappresentazione tabulare:
Dati gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

devo prendere tutti gli elementi che appartengono ad A **e contemporaneamente** appartengono a B.

Vediamo mediante i diagrammi:



(in azzurro l'insieme *intersezione*)

Mediante caratteristica:

$$A = \{ x \in N : x < 5 \}$$
$$B = \{ x \in N : 2 < x < 7 \}$$

$$A \cap B = \{ x \in N : x < 5 \text{ e contemporaneamente } 2 < x < 7 \} = \{ x \in N : 2 < x < 5 \}$$

c) Proprietà delle operazioni unione ed intersezione

Vediamo in questa pagina le principali proprieta' dell'unione e dell'intersezione.

E' possibile dimostrarle abbastanza facilmente utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.

Proprieta' *commutativa*

Per l'unione : $A \cup B = B \cup A$

Per l'intersezione: $A \cap B = B \cap A$

Proprieta' *associativa*

Per l'unione **:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Per l'intersezione: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Proprieta' di *idempotenza*

Per l'unione : $A \cup A = A$

Per l'intersezione: $A \cap A = A$

Proprieta' *dell'insieme vuoto*

Per l'unione : $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

per l'unione l'insieme vuoto e' l'elemento neutro

Per l'intersezione: $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$

per l'intersezione l'insieme vuoto e' l'elemento assorbente

Proprieta' *distributiva*

Dell'unione rispetto all'intersezione: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dell'intersezione rispetto all'unione: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proprieta' di *assorbimento*

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

d) Differenza

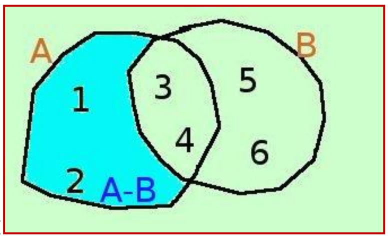
Si definisce ***differenza*** fra due insiemi l'insieme degli elementi del primo insieme che non appartengono al secondo insieme.
Si indica come $A \setminus B$ od anche A-B e si legge “differenza fra A e B” .
Abbiamo due casi:

- il secondo insieme non e' contenuto completamente nel primo insieme. In tal caso si parla semplicemente di **differenza**.

Esempio:
Dati gli insiemi:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad e \quad B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$$
$$A \setminus B = A\text{-}B = \{ 1, 2 \}$$

Devo prendere tutti gli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B.
In diagrammi di Eulero-Venn:



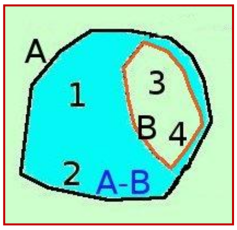
l'insieme *differenza* e' in azzurro

- il secondo insieme e' contenuto nel primo insieme $B \subset A$. In tal caso si parla di **differenza complementare**.

Esempio:
Dati gli insiemi:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad e \quad B = \{ 3, 4 \}$$
$$A \setminus B = A - B = \{ 1, 2 \}$$

Devo prendere tutti gli elementi di A che non appartengono a B.
In diagrammi di Eulero-Venn:

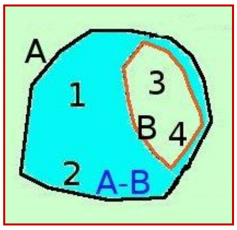


l'insieme *differenza* e' in azzurro

e) Complementare di un insieme

Riprendiamo l'esempio di differenza complementare della pagina precedente con l'insieme B contenuto in A $B \subset A$:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad e \quad B = \{ 3, 4 \}$$
$$A \setminus B = A\text{-}B = \{ 1, 2 \}$$



Allora possiamo dire che A\B e' l'insieme **complementare** di B rispetto all'insieme A e lo indicheremo con $\overline{B}$:

$$\mathbf{A \setminus B = A - B = \overline{B}}$$

L'unione di un insieme con il suo complementare restituisce l'insieme di partenza:

$$B \cup \overline{B} = \overline{B} \cup B = A$$

l'intersezione di un insieme con il suo complementare e' l'insieme vuoto:

$$B \cap \overline{B} = \overline{B} \cap B = \emptyset$$

Avremo in generale per qualunque insieme:

$$A = \overline{\overline{A}}$$

cioe' il complementare del complementare (il doppio complementare) di un insieme rispetto ad un qualunque sovrainsieme e' l'insieme di partenza.
Si dice che l'insieme **C** e' **sovrainsieme** dell'insieme **A** se **C** contiene **A.**

f) Insieme universo

Introduciamo ora il concetto di ***insieme universo***.
Il complementare dell'insieme vuoto Ø sara' tutto l'insieme di partenza; conviene quindi introdurre il concetto di **insieme universo E** come complementare dell'insieme vuoto

$$\overline{\emptyset} = E \qquad \overline{E} = \emptyset$$

Quindi, quando parleremo solo di un insieme su cui considerare sottoinsiemi ed operazioni a lui interne, potremo considerarlo come **insieme universo** e lo indicheremo con **E.**
Allora tutti gli insiemi che considereremo d'ora in avanti saranno considerati come sottoinsiemi di un insieme universo **E** prefissato; cio' ci permettera' di superare antinomie (cioe' contraddizioni logiche) nelle applicazioni:

Proprieta' ***dell'insieme universo***

Per l'unione **:** $\mathbf{A \cup E = E \cup A = E}$

Per l'intersezione**:** $\mathbf{A \cap E = E \cap A = A}$

g) Differenza simmetrica

E' un'operazione poco usata, ma in qualche liceo scientifico si fa, quindi definiamola.

Si definisce ***differenza simmetrica*** fra due insiemi l'insieme che contiene come elementi l'unione tra:

- gli elementi del primo insieme che non appartengono al secondo
- e gli elementi del secondo insieme che non appartengono al primo

e si indica come: $\mathbf{A \vartriangle B}$

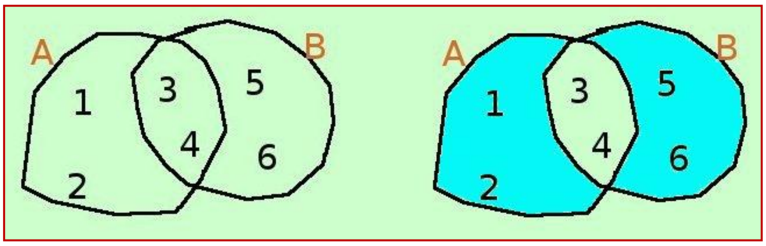
Dati gli insiemi:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \qquad \text{e} \qquad B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A \vartriangle B = \{ 1, 2, 5, 6 \}$$

Devo prendere tutti gli elementi che appartengono solo ad A e non a B **o anche** quelli che appartengono solo a B e non ad A.

Vediamo mediante i diagrammi:



in azzurro l'insieme *differenza simmetrica*

Possiamo anche dire che valgono le seguenti relazioni:
Dalla definizione segue:

$$A \vartriangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Dal diagramma segue che dall'unione devi togliere l'intersezione:

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

e per la proprieta' transitiva seguira' l'uguaglianza notevole:

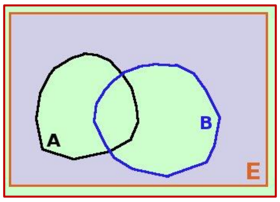
$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

h) Leggi di De Morgan

Prima legge:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Il complementare di $A \cup B$ rispetto all'insieme universo E e' la parte in azzurro
E se consideri il complementare di A ed anche il complementare di B la loro intersezione e' ancora la parte azzurra.

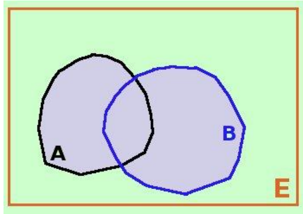


Dimostrazione nei particolari della prima legge di Morgan:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

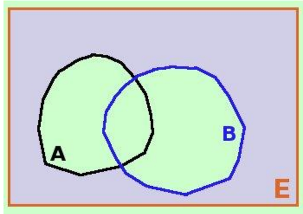
Dimostrazione: in azzurrino la parte che consideriamo.
Prima legge di De Morgan:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

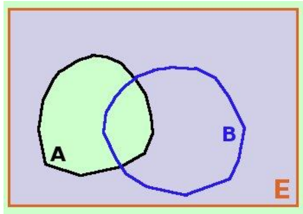


Consideriamo la parte prima dell'uguale:

AUB e'

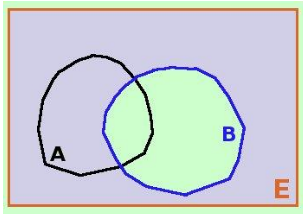


e il complementare $\overline{A \cup B}$
rispetto ad **E** e':

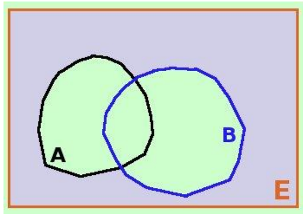


Considero ora la parte dopo l'uguale:

$\overline{A}$ rispetto ad **E** e'



e $\overline{B}$ rispetto ad **E** vale:

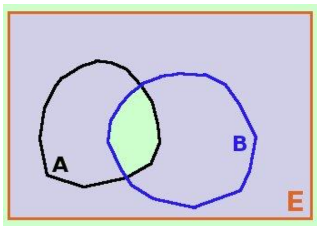


Quindi la parte comune ad entrambe

$\overline{A} \cap \overline{B}$ vale:
che corrisponde a quanto gia' trovato.
Come volevamo.

Seconda legge

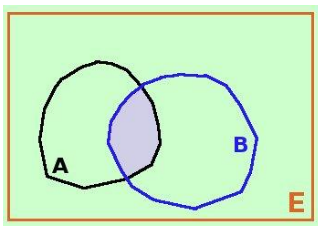
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



Il complementare di $A \cap B$ rispetto all'insieme universo E e' la parte in azzurro.
E se consideri il complementare di A ed anche il complementare di B la loro unione e' ancora la parte azzurra.
Dimostrazione nei particolari della seconda legge di Morgan:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

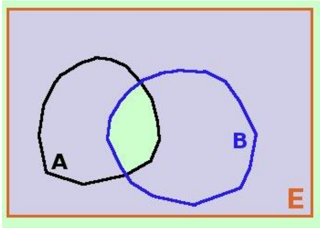
Dimostrazione in azzurrino la parte che consideriamo.



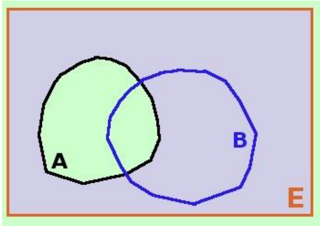
Consideriamo la parte prima dell'uguale:

$A \cap B$ e':

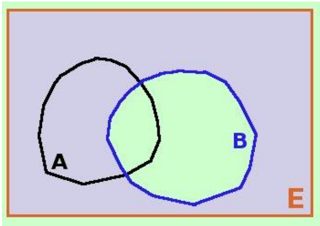
e il complementare $\overline{A \cap B}$
rispetto ad E e'



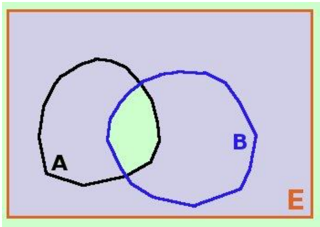
considero ora la parte dopo l'uguale
$\overline{A}$ rispetto ad E e' :



e $\overline{B}$ rispetto ad E vale :



Quindi la loro unione:
$\overline{A} \cup \overline{B}$ vale:
che corrisponde a quanto gia' trovato.
Come volevamo.



i) Prodotto cartesiano

(1) Concetto di coppia ordinata

Finora negli insiemi non abbiamo mai usato l'ordine: per poterlo introdurre usiamo il concetto di coppia ordinata: quindi la coppia ordinata servira' a inserire il concetto di ordine nella teoria degli insiemi.

Definizione:
Chiameremo ***coppia ordinata*** **(a, b)** l'insieme di due elementi in cui **a** e' il primo elemento e **b** e' il secondo elemento.

Dalla definizione segue che la coppia ordinata **(a, b)** e' diversa dalla coppia ordinata **(b, a)** .

---

(2) Prodotto cartesiano fra due insiemi

Definiamo prodotto cartesiano **AxB** di due insiemi **A** e **B** l'insieme di tutte le coppie ordinate che hanno come primo elemento un elemento di **A** e come secondo elemento un elemento di **B.**

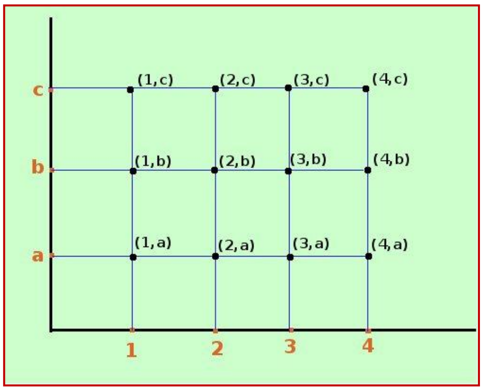
Dati gli insiemi:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad \text{e} \quad B = \{ a, b, c \}$$

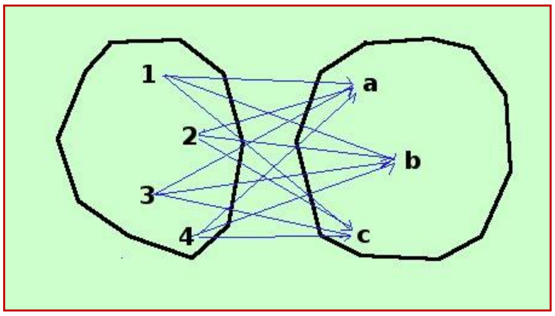
costruisco tutte le coppie considerando come primo elemento un elemento di A e come secondo elemento un elemento di B:

A x B = { (1,a) (1,b) (1,c) (2,a) (2,b) (2,c) (3,a) (3,b) (3,c) (4,a) (4,b) (4,c) }

Particolarmente interessante e' la rappresentazione cartesiana del prodotto. Riportando su un asse orizzontale gli elementi di A e su un asse verticale gli elementi di B le coppie sono rappresentate dai punti di incrocio:



Un altro metodo per rappresentare il prodotto cartesiano fra due insiemi consiste nel collegare i due insiemi con delle frecce (dal primo al secondo insieme con le punte delle frecce nel secondo insieme):



ma secondo me, se gli insiemi hanno piu' di tre elementi e' una gran confusione ed e' preferibile la rappresentazione precedente.

(3) Proprieta' del prodotto cartesiano

Diciamo subito che, essendo le coppie ordinate, il prodotto cartesiano di due insiemi distinti non gode della proprieta' commutativa, cioe':

$$A \times B \neq B \times A$$

Siccome l'insieme vuoto non ha elementi allora avremo:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

Inoltre il prodotto cartesiano gode della proprieta' distributiva rispetto all'unione:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

ed anche rispetto all'intersezione fra insiemi:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

(4) Prodotto cartesiano di un insieme con se' stesso

Particolarmente interessante e' il caso in cui il prodotto cartesiano coinvolge solo un insieme (prodotto cartesiano di un insieme su se' stesso):

$$A \times A$$

Vedremo che spesso considereremo insiemi in $R \times R$ tipo le funzioni come applicazioni da $R \times R$ ad R:

$$f : R \times R \rightarrow R$$

7. Ricoprimento finito di un insieme

Di solito un insieme si puo' suddividere in sottoinsiemi; particolarmente importante e' il caso in cui gli insiemi in cui lo dividiamo sono in numero finito e la loro unione ricostituisce l'insieme di partenza; in tal caso parleremo di ricoprimento finito di un insieme.

Definizione:
Diremo che un insieme finito di sottoinsiemi non vuoti dell'insieme **E** e' un ***ricoprimento finito*** dell'insieme E, se ogni elemento di E appartiene ad almeno uno dei sottoinsiemi.

Esempio:
Dato l'insieme:

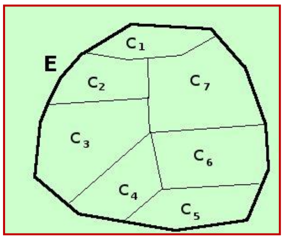
$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

un ricoprimento finito (uno dei tanti possibili) potrebbe essere costituito dagli insiemi: A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A_1 = \{ 1, 2, 3\}$$
$$A_2 = \{ 1, 2, 6\}$$
$$A_3 = \{ 3, 4 \}$$
$$A_4 = \{ 4, 5, 6\}$$

Anche i due sottoinsiemi A_1 e A_4 da soli andrebbero bene per fare un ricoprimento finito. In pratica per fare un ricoprimento basta che prendi tanti sottoinsiemi non vuoti in modo pero' da non saltare nessun elemento.

8. Partizione di un insieme



Quando il ricoprimento finito e' formato da insiemi senza elementi comuni allora avremo una partizione dell'insieme E.
Diremo che un insieme finito di sottoinsiemi non vuoti dell'insieme **E** e' una **partizione** dell'insieme E, se ogni elemento di E appartiene ad uno ed uno solo dei sottoinsiemi.

Diamo ora la definizione matematica.
Definizione:
Si dice che si opera una **partizione** dell'insieme **E** nelle classi (sottoinsiemi) $C_1, C_2, C_3, \dots\dots, C_n$ se tali classi godono delle seguenti proprieta':

- *nessuna classe e' vuota:*

$$C_i \neq \emptyset$$

- *tutte le classi sono disgiunte fra loro:*

  $C_i \cap C_j = \emptyset$
- *L'unione di tutte le classi restituisce l'insieme* ***E*** *:*

  $$\bigcup_{i=1}^{i=n} C_i = E$$

Vediamo un semplice esempio:
Sia $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Una partizione dell'insieme E (tra quelle possibili) potrebbe essere costituita dagli insiemi (classi) C_1 C_2 C_3 :

$$C_1 = \{ 1, 2, 3\}$$
$$C_2 = \{ 4\}$$
$$C_3 = \{ 5, 6 \}$$

C. *Relazioni*

Veniamo ora al concetto di **relazione** che ci permettera' di considerare corrispondenze fra elementi di uno o piu' insiemi.

1. Definizione di relazione binaria

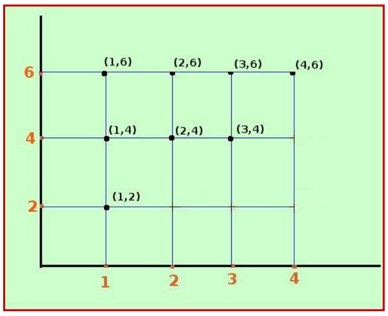
Possiamo definire la relazione fra due insiemi A e B in due modi diversi, uno riferito agli insiemi e l'altro agli elementi dei due insiemi:

- Definiamo relazione $\mathcal{R}$ fra due insiemi **A** e **B** un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano **A x B.**
- Dati due insiemi **A** e **B,** diciamo che esiste una relazione $\mathcal{R}$ fra **A** e **B** se esiste una proprieta' che associ a qualche elemento di **A** un elemento di **B;** cioe' se $a \in A$ e $b \in B$, allora per ogni **a** e per ogni **b** dobbiamo poter dire se e' valida o meno la proprieta' **a** $\mathcal{R}$ **b** sulla coppia **(a,b).**
  La relazione sara' l'insieme di tutte le coppie **(a,b)** per cui $\mathcal{R}$ e' valida.
  Esempio:
  Considero gli insiemi:

  $$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \qquad \text{e} \qquad B = \{ 2, 4, 6 \}$$

  E considero valida la relazione $a \ \mathcal{R} \ b$ se vale la proprieta' $a < b$.
- Come coppie abbiamo che la relazione e' formata da:

  (1,2) (1,4) (1,6) (2,4) (2,6) (3,4) (3,6) (4,6)
- Come sottoinsieme del prodotto cartesiano abbiamo che la relazione e' formata da:



2. Relazione binaria su un insieme su se stesso

Particolarmente interessante e' parlare di relazioni quando i due insiemi **A** e **B** coincidono. In tal caso si parla di relazione binaria di un insieme su se' stesso oppure semplicemente **relazione binaria su un insieme** .

D'ora in avanti considereremo solo questo tipo di relazione, e, nelle prossime pagine ne considereremo i vari tipi elementari, cosa che ci permettera' di "partizionare" od anche "ordinare" un insieme.

Esempi:

Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'".
Per ogni coppia di cittadini italiani e' possibile dire se la relazione e' vera o falsa.

Considero gli alunni di una scuola e considero la relazione "e' nato nello stesso anno di".
Per ogni coppia di alunni e' possibile dire se la relazione e' vera o falsa

Considero gli alunni di una scuola e considero la relazione "e' piu' alto di".
Per ogni coppia di alunni e' possibile dire se il primo e' piu' alto del secondo

Considero l'insieme dei primi 10 numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale di". Per ogni coppia di numeri puoi dire se il primo e' maggiore od uguale rispetto al secondo

Come vedi e' molto facile fare una relazione; basta confrontare fra loro le caratteristiche di alcuni elementi dell'insieme di partenza.

3. Relazione riflessiva

Definiamo ora le relazioni principali sia dal punto di vista della definizione come sottoinsieme del prodotto cartesiano che con la definizione (piu' usata) riferita agli elementi dell'insieme

- Diciamo che una relazione $\mathcal{R}$ e' **riflessiva,** se come sottoinsieme del prodotto cartesiano **A x A** contiene la diagonale principale; cioe' contiene tutti gli elementi del tipo **(a,a)** con **a** elemento qualunque di **A.**
- Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' **riflessiva** se per ogni elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ vale: **a**$\mathcal{R}$ **a.**
-

$$\mathrm{a}\,\mathcal{R}\,\mathrm{a}$$

a e' in relazione con se' stesso

Esempi:
Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'".
Per ogni cittadino la relazione e' riflessiva: ognuno abita nella stessa citta' di se' stesso

Considero gli alunni di una scuola e considero la relazione "e' nato nello stesso anno di".
Per ogni alunno la relazione e' riflessiva: infatto ognuno e' nato nello stesso anno di se' stesso

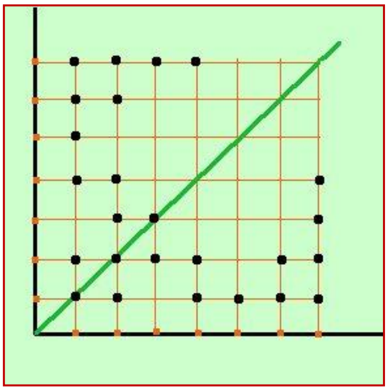
Considero gli alunni di una scuola e considero la relazione "e' piu' alto di".
La relazione non e' riflessiva perche' nessuno e' piu' alto di se' stesso

Considero una famiglia e la relazione "e' figlio di"
per ogni persona la relazione non e' riflessiva: infatti nessuno e' figlio di se' stesso

4. Relazione simmetrica

Diciamo che una relazione $\mathcal{R}$ e' ***simmetrica*** se come sottoinsieme del prodotto cartesiano **A x A** e' formata da un insieme simmetrico rispetto alla diagonale principale; cioe' ribaltando attorno alla diagonale principale la parte sopra la diagonale si ottiene la parte sotto la diagonale.

Esempio:



In verde la diagonale principale; in nero gli elementi della relazione simmetrica

Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' **simmetrica,** se ogni volta che si ha **a**$\mathcal{R}$**b,** si ha anche **b** $\mathcal{R}$ **a:**

$$a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$$

a in relazione con **b** implica **b** in relazione con **a**

Esempi:

Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'"
la relazione e' simmetrica: infatti se Maria abita nella stessa citta' di Carlo anche Carlo abita nella stessa citta' di Maria.

Considero gli alunni di una scuola e considero la relazione "e' nato nello stesso anno di"
Per ogni alunno la relazione e' simmetrica: infatti se Antonio e' nato nello stesso anno di Cleopatra anche Cleopatra e' nata nello stesso anno di Antonio.

Considero gli alunni di una scuola e considero la relazione "e' piu' alto di"
La relazione non e' simmetrica perche' perche' se Dante e' piu' alto di Beatrice non segue che Beatrice e' piu' alta di Dante.

Considero una famiglia e la relazione "e' fratello di"
la relazione e' simmetrica: se Enrico e' fratello di Nicola allora anche Nicola e' fratello di Enrico.

5. Relazione antisimmetrica

Qui non diamo la definizione mediante prodotto cartesiano perche' piuttosto complicata.

Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' ***antisimmetrica*** se ogni volta che si ha **a**$\mathcal{R}$ **b** e **b**$\mathcal{R}$**a** ne segue che **a = b.**

Qualcuno preferisce dire, in modo equivalente, che per **a ≠ b**

$a \mathcal{R} b$ esclude $b \not\mathcal{R} a$

$$a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$$

Se **a** in relazione con **b** e **b** in relazione con **a** allora **a = b**

oppure

$$a \neq b \Rightarrow a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b \not\mathcal{R} a$$

Se **a** e' diverso da b allora **a** in relazione con **b** esclude **b** in relazione con **a**
leggendo termine e termine
a diverso da **b** implica che che **a** e' in relazione con **b** se e solo se **b** non e' in relazione con **a**

Esempio:
Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'".
La relazione non e' antisimmetrica; infatti se Maria abita nella stessa citta' di Carlo e Carlo abita nella stessa citta' di Maria, non segue che Carlo e' uguale a Maria.

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale a".
La relazione e' antisimmetrica perche' se un numero e' maggiore od uguale ad un secondo numero ed il secondo e' maggiore uguale del primo, allora i due numeri sono uguali.

6. Relazione transitiva

Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' **transitiva** se ogni volta che si ha $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$ allora segue che $a \mathcal{R} c$:

$$a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$$

Se **a** e' in relazione con **b** e **b** e' in relazione con **c** allora **a** e' in relazione con **c**

Esempi:
Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'"
la relazione e' transitiva: infatti se Maria abita nella stessa citta' di Carlo e Carlo abita nella stessa citta' di Antonio segue che Maria abita nella stessa citta' di Antonio.

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale a"
La relazione e' transitiva perche' se un numero e' maggiore od uguale ad un secondo numero ed il secondo e' maggiore uguale ad un terzo allora il primo numero e'maggiore od uguale al terzo.

Considero una famiglia e la relazione "e' fratello di"
la relazione e' transitiva: se Enrico e' fratello di Nicola e Nicola e' fratello di Emanuele allora anche Enrico e' fratello di Emanuele.

Considero una famiglia e la relazione "e' padre di"
la relazione non e' transitiva: se Antonio e' padre di Bruno e Bruno e' padre di Carlo allora non e' vero che Antonio e' padre di Carlo (infatti Antonio e' il nonno di Carlo).

7. Relazione di equivalenza

Piu' che le relazioni elementari, viste sinora, sono importanti le relazioni "composte" cioe' le relazioni formate da piu' relazioni elementari.

Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' **di equivalenza** se e' contemporaneamente riflessiva, simmetrica e transitiva:

$\mathcal{R}$ e' relazione di equivalenza se e'
riflessiva simmetrica transitiva

Se su un insieme e' possibile individuare una relazione di equivalenza, allora e' possibile individuare un nuovo insieme: l'**insieme quoziente** che vedremo nelle prossime pagine:

- Insieme quoziente
- Generazione dell'insieme **N**

Esempi (sulle relazioni di equivalenza) :
per le proprieta' riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva degli esempi fai riferimento agli esempi corrispondenti delle pagine precedenti.
Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'"
la relazione e' di equivalenza: infatti e' contemporaneamente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale a"
La relazione non e' di equivalenza: e' riflessiva e transitiva, ma non e' simmetrica (e' antisimmetrica).

Considero una famiglia e la relazione "e' fratello di"
la relazione e' di equivalenza : infatti e' riflessiva, simmetrica e transitiva.

Considero una famiglia e la relazione "e' padre di"
la relazione non e' di equivalenza: infatti non e' riflessiva ne' simmetrica ne' transitiva.

a) Insieme quoziente

La relazione di equivalenza e' importantissima perche' se riusciamo ad individuarla su un insieme l'insieme stesso viene suddiviso in sottoinsiemi (chiamati anche classi) tali che formano una partizione dell'insieme di partenza, cioe' gli elementi di un nuovo insieme, l'**insieme quoziente**.

Esempi:
Considero l'insieme degli alunni di un istituto scolastico e considero la relazione: "e' nella stessa aula di"

- E' **riflessiva:** ognuno e' nella stessa aula di se' stesso.
- E' **simmetrica:** se Alice e' nella stessa aula di Bruno anche Bruno e' nella stessa aula di Alice.
- E' **transitiva:** se Alice e' nella stessa classe di Bruno e Bruno e' nella stessa aula di Carla allora Alice e' nella stessa aula di Carla.

Quindi e' una relazione di **equivalenza** Questa relazione divide tutti gli alunni dell'istituto scolastico in gruppi (classi) che corrispondono alle classi dell'istituto e l'insieme quoziente ha come elementi queste classi: 1A, 1B, 1C, 2A, 2B,.....

Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione : "abita nella stesso comune".

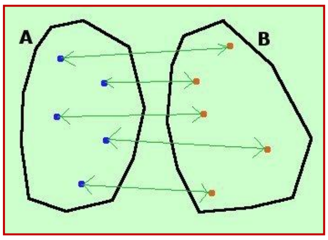
- E' **riflessiva:** ognuno abita nello stesso comune di se' stesso.
- E' **simmetrica:** se Aldo abita nello stesso comune di Beatrice anche Beatrice abita nello stesso comune di Aldo.
- E' **transitiva:** se Antonio abita nello stesso comune di Bianca e Bianca abita nello stesso comune di Carlotta allora Antonio abita nello stesso comune di Carlotta.

Quindi e' una relazione di **equivalenza** Questa relazione divide tutti i cittadini italiani in gruppi (classi) che corrispondono alle citta' italiane e l'insieme quoziente ha come elementi queste citta': Milano, Venezia, Bologna, Napoli, Palermo,.......

Matematicamente per individuare un elemento dell'insieme quoziente basta considerarne un singolo componente; ad esempio negli esempi visti sopra potrei dire:
La classe dell'alunno Bianchi Ermenegildo
oppure
La citta' italiana dove abita Antelami Antinisco.
Matematicamente, dobbiamo considerare tutti gli elementi distinguibili fra loro e perfettamente individuati dal loro nome, mentre nella realta' c'e' qualche problema perche' possono esservi delle persone con lo stesso nome

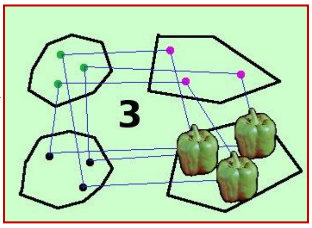
b) Generazione dell'insieme **N**

Utilizzando la relazione di equivalenza e' possibile generare logicamente, mediante gli insiemi, l'insieme **N** dei Numeri Naturali .
Per poterlo mostrare ti anticipo la nozione di corrispondenza biunivoca fra due insiemi
Una corrispondenza biunivoca fra due insiemi si ha quando ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa.



Considero l'insieme di tutti gli insiemi e considero la relazione "e' in corrispondenza biunivoca"; la relazione e' di equivalenza; infatti e' contemporaneamente :

- **Riflessiva**: ogni insieme e' in corrispondenza biunivoca con se' stesso.
- **Simmetrica**: Se l'insieme **A** e' in corrispondenza biunivoca con l'insieme **B** allora anche l'insieme **B** e' in corrispondenza biunivoca con l'insieme **A.**
- **Transitiva**: Se l'insieme **A** e' in corrispondenza biunivoca con l'insieme **B** e l'insieme **B** e' in corrispondenza biunivoca con l'insieme **C** allora segue che l'insieme **A** e' in corrispondenza biunivoca con l'insieme **C.**



Questa relazione divide l'insieme di tutti gli insiemi in gruppi (classi) tali che tutti gli elementi della stessa classe hanno la stessa quantita' di elementi (cardinalita') e quindi l'insieme quoziente, essendo formato da tutti gli insiemi con lo stesso numero di elementi, puo' essere rappresentato da un numero cioe' otteniamo l'insieme **N** dei numeri naturali:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Quindi, ad esempio, il numero 3 rappresentera' la classe formata da tutti gli insiemi composti da 3 elementi

8. Relazione d'ordine

Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' **d'ordine** se e' contemporaneamente riflessiva, antisimmetrica e transitiva:

$\mathcal{R}$ e' relazione d'ordine se e' riflessiva antisimmetrica transitiva

In pratica avrai un a relazione d'ordine se puoi dire se tra due elementi uno e' minore od uguale (oppure maggiore od uguale) all'altro.

Se su un insieme e' possibile individuare una relazione d'ordine, allora e' possibile ordinare l'insieme stesso e l'insieme viene detto **ordinato**. Due suoi elementi cui si applica la relazione sono **confrontabili** nel senso che si puo' dire se il primo precede (o segue) il secondo.
Approfondiamo un po' il concetto di relazione d'ordine:

- Relazione d'ordine stretto
- Relazione d'ordine totale **N**
- Relazione lineare **N**

Esempi:
Per le proprieta' riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva degli esempi fai riferimento agli esempi corrispondenti delle pagine precedenti.
Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'.
La relazione non e' di ordine; infatti e' riflessiva e transitiva ma non antisimmetrica.

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale a".
La relazione e' d'ordine; infatti, e' riflessiva, antisimmetrica e transitiva e i numeri si possono ordinare ad esempio in ordine crescente:
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Supponiamo di avere un caseggiato di piu' piani che abbia una famiglia per ogni piano e considero al relazione "la famiglia X abita allo stesso piano oppure ad un piano superiore della famiglia Y".
La relazione e' d'ordine; infatti e' riflessiva, antisimmetrica e transitiva; possiamo ordinare gli elementi come:
famiglia del pianterreno,
famiglia del primo piano,
famiglia del secondo piano,
famiglia del terzo piano,
....

a) Relazione d'ordine stretto

Diciamo che la relazione $\mathcal{R}$ su **A x A** e' **d'ordine stretto**, se si ha:

$$a \ \mathcal{R} \ b \iff a \neq b$$

Non ti spaventare, vuol dire che nella relazione invece che minore od uguale, devi solo considerare il minore; di conseguenza la relazione d'ordine stretto non sara' riflessiva (nessuno e' minore di se' stesso).
Ad ogni relazione d'ordine e' possibile associare una relazione d'ordine stretto: bastera' trasformare il "maggiore od uguale" semplicemente in "maggiore" (od il "minore od uguale" in "minore").

Esempi:

Considero l'insieme:

$$A = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 20 \}$$

con la relazione: "e' multiplo di".
La relazione e':
- *antisimmetrica:* se A e' multiplo di B e B e' multiplo di A segue che A=B
- *transitiva:* se 20 e' mutiplo di 4 e 4 e' multiplo di 2 allora 20 e' multiplo di 2:
inoltre, se A e' diverso da B, allora A multiplo di B esclude B multiplo di A.
Di conseguenza la relazione e' di ordine stretto.
Nota pero' che ci sono alcuni elementi non confrontabili; ad esempio 20 non e' multiplo di 16.

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore di".
La relazione e' d'ordine stretto; infatti, presi due numeri diversi o il primo e' maggiore del secondo oppure il secondo e' maggiore del primo: **1, 2, 3, 4, 5, 6, ...**

Considero tutti gli esseri umani viventi e trapassati, e considero la relazione "e' antenato di".
La relazione e' d'ordine stretto; infatti, e' transitiva e se A e B appartengono alla relazione si ha A e' antenato di B oppure B e' antenato di A.
L'ordine che tale relazione da' e' l'albero genealogico.
Anche qui ci sono elementi non confrontabili; ad esempio due fratelli non appartengono alla relazione.

Per contrapposizione una relazione d'ordine che non sia d'ordine stretto si dice di *ordine largo.*

b) Relazione d'ordine totale

Diciamo che la relazione R su **A x A** e' **d'ordine totale** se tutti i suoi elementi appartengono alla relazione.
In pratica significa che tutti gli elementi, nessuno escluso, sono nella relazione.

Riprendiamo gli esempi della pagina precedente
Considero l'insieme:

$$A = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 20 \}$$

con la relazione: "e' multiplo di".
Abbiamo visto che e' una relazione d'ordine stretto; siccome ci sono alcuni elementi non confrontabili (ad esempio 20 non e' multiplo di 16), allora la relazione non e' totale.

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore di".
Questa relazione e' anche d'ordine totale; infatti presi due numeri diversi essi sono sempre confrontabili:
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Considero tutti gli esseri umani viventi e trapassati, e considero la relazione "e' antenato di".
La relazione non e' totale: ad esempio due fratelli non appartengono alla relazione.

c) Relazione d'ordine lineare

Diciamo che la relazione R su **A x A** e' **d'ordine lineare** se e' contemporaneamente:
- d'ordine stretto
- d'ordine totale

Come insieme considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore di".
La relazione e' lineare; infatti e' d'ordine stretto e totale contemporaneamente:
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

L'insieme su cui hai una relazione d'ordine lineare si dice "*bene ordinato*"; N e' un insieme "bene ordinato".

D. Applicazioni o funzioni

Veniamo ora a definire mediante gli insiemi uno dei concetti piu' importanti della matematica: il concetto di applicazione o funzione.
Per indicarti l'importanza del concetto ti elenco i sinonimi che vengono usati in matematica per indicarlo:

- Applicazione
- Funzione
- Corrispondenza univoca
- Operatore
- Mappa

Veramente qualche piccola differenza di significato c'e'; ad esempio se dici *applicazione* pensi al passaggio da A a B termine a termine ; mentre se dici *funzione* poni l'accento sul legame totale che c'e' fra A e B; e cosi anche per le altre denominazioni, pero' queste sono sottigliezze che puoi tranquillamente trascurare.
Usero' indifferentemente i termini "*applicazione*" e "*funzione*" .

1. Definizione di applicazione o funzione fra insiemi

Intuitivamente si ha una funzione quando si riesce a stabilire un legame tra due insiemi diversi in modo che ad elementi del primo insieme corrispondano elementi del secondo insieme.
La definizione matematica e':

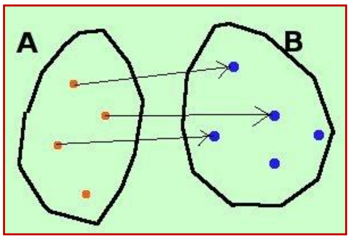
> Dati due insiemi non vuoti **A** e **B** si chiama **applicazione univoca** (o **funzione**) di **A** in **B** una qualsiasi legge che faccia corrispondere ad ogni elemento di **A** uno ed un solo elemento di **B**

chiamando **f** l'applicazione si scrive:

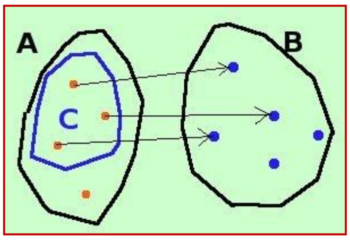
$$f : A \to B$$

Si legge "f e' applicazione da A a B".

Approfondiamo un po' il concetto; utilizziamo i diagrammi di Eulero-Venn per visualizzare degli esempi.

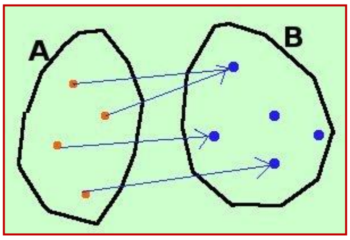


Questa rappresentata a destra non e' una applicazione perche' esiste un elemento dell'insieme A a cui non corrisponde nulla nell'insieme B .

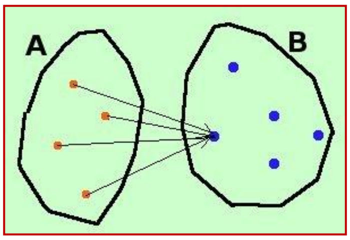


Nell'esempio precedente, se invece dell'insieme A, considero il sottoinsieme C, allora ho un'applicazione da C a B:

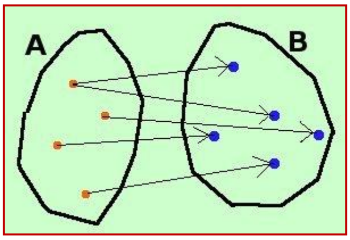
$$f : C \to B$$



Questa rappresentata a destra e' un'applicazione da A a B: non importa se piu' elementi di A hanno corrispondente lo stesso elemento di B, l'importante e' che ad ogni elemento di A corrisponda un elemento (qualunque) di B.



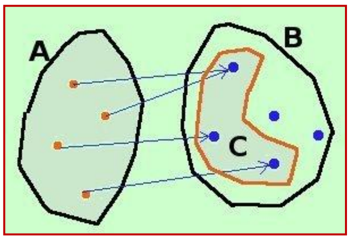
Se ad ogni elemento di A corrisponde sempre lo stesso elemento di B diciamo che abbiamo una applicazione costante da A a B.



Invece questa a destra non e' una applicazione da A a B perche' ad un elemento di A corrispondono 2 elementi di B (e' invece una applicazione se consideriamo la relazione da B ad A).

2. Codominio

Siccome nella definizione di funzione esauriamo l'insieme A ma non e' detto che esauriamo l'insieme B diventa importante definire quanta parte dell'insieme B entri a far parte dell'applicazione.



In figura vedi che l'insieme **A** viene trasformato dall'applicazione nel sottoinsieme **C** di **B.**
Allora chiameremo **C**:

- **Codominio**
- **Immagine di A mediante l'applicazione**
- **Trasformato di A**

In generale avremo la ***definizione***:

> Dati due insiemi non vuoti **A** e **B** e l'applicazione $f: A \to B$
> si chiama **codominio dell'applicazione** l'insieme degli elementi di **B** che provengono da elementi di **A** tramite l'applicazione

3. Dominio

Ora per analogia consideriamo l'insieme dei valori che l'applicazione puo' assumere sull'insieme A (in pratica consideriamo l'insieme A); questo verra' definito:

- **Dominio dell'applicazione**

- **Antiimmagine**
- **Insieme di esistenza**
- **Insieme di definizione**

In generale, avremo la ***definizione*** :

> Dati due insiemi non vuoti **A** e **B** e l'applicazione $\mathbf{f : A \to B}$
> si chiama **dominio dell'applicazione** l'insieme degli elementi di **A** su cui agisce l'applicazione

---

In pratica nelle applicazioni su insiemi il dominio coincide con l'insieme stesso; invece sara' importante la definizione di dominio con insiemi infiniti, ad esempio in Analisi quando dovremo considerare funzioni tipo radicali, frazioni e logaritmi nell'insieme R dei numeri reali.

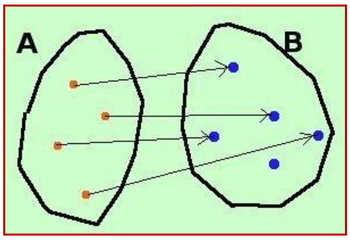
4. Applicazione iniettiva

Diremo che un'applicazione:

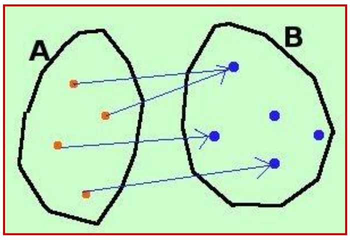
$$\mathbf{f : A \to B}$$

e' **iniettiva** se ad ogni elemento di **A** corrisponde un elemento diverso di **B.**

Esempio di applicazione **iniettiva**: ogni elemento di **A** e' in corrispondenza con un diverso elemento di **B**



Esempio di applicazione **non iniettiva**: esistono due elementi di **A** a cui corrisponde lo stesso elemento di **B**



In qualche testo invece che **applicazione iniettiva** viene usato il termine (bruttissimo) **iniezione .**

---

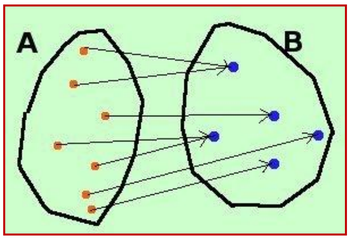
5. Applicazione suriettiva

Diremo che un'applicazione:

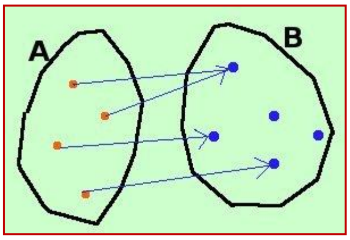
$$\mathbf{f : A \to B}$$

e' **suriettiva** se esaurisce l'insieme **B.**

Esempio di applicazione **suriettiva**: ogni elemento di **B** e' collegato con almeno un elemento di **A.**



Esempio di applicazione **non suriettiva**: esistono elementi di **B** non collegati ad elementi di **A.**



6. Corrispondenza biunivoca

Diremo che un'applicazione:

$$f : A \rightarrow B$$

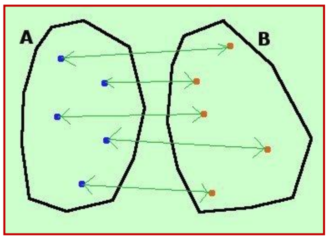
e' una **corrispondenza biunivoca** (od un **applicazione biiettiva**) se e' contemporaneamente:

- **Iniettiva**
- **Suriettiva**

$$f : A \xrightarrow[1\text{-}1]{su} B$$

Cioe' ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di B e viene esaurito l'insieme B.
In pratica significa che ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B e ad ogni elemento di B corrisponde un solo elemento di di A, cioe' la relazione e' iniettiva sia da A a B che a rovescio da B ad A (si dice **biiettiva**)

Esempio di **corrispondenza biunivoca**: ogni elemento di **A** e' collegato con un solo elemento di **B** e l'insieme **B** viene esaurito (od anche ogni elemento di **B** e' collegato con un solo elemento di **A**).



Un esempio abbastanza semplice di corrispondenza biunivoca in un' aula scolastica e' quello fra ogni alunno della classe ed il suo banco: ad ogni alunno corrisponde il suo banco e ad ogni banco corrisponde il suo alunno; la corrispondenza non e' biunivoca il giorno che l'alunno Pierino marina la scuola mentre e' biunivoca quando tutti gli alunni sono presenti.

In matematica la corrispondenza biunivoca e' importantissima perche' tutte le proprieta' matematiche di un insieme A sono valide anche in tutti gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza bunivoca con A.

Come dicevo ai miei alunni:
"E' come se invece di promuovere voi si promuovessero i vostri banchi"

Qualcuno la chiama anche **biiezione** (termine orrendo!) .

7. Insieme infinito

Ora, con la corrispondenza biunivoca fra insiemi possiamo riuscire a definire l'**insieme infinito** .

Definizione:

> Diremo che un insieme e' **infinito** se e' possibile porlo in corrispondenza biunivoca con una sua parte

Esempio:
Considero l'insieme **N** dei Numeri Naturali :

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

e considero l'insieme dei numeri naturali pari:

$$N_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

I due insiemi sono in corrispondenza biunivoca perche' ad ogni numero in **N** corrisponde il suo doppio in $\mathbf{N_2}$ e ad ogni numero in $\mathbf{N_2}$ corrisponde la sua meta' in **N:**

$$\begin{array}{ccc} N & \longleftrightarrow & N_2 \\ 1 & \longleftrightarrow & 2 \\ 2 & \longleftrightarrow & 4 \\ 3 & \longleftrightarrow & 6 \\ 4 & \longleftrightarrow & 8 \\ 5 & \longleftrightarrow & 10 \\ \dots & \longleftrightarrow & \dots \\ \dots & \longleftrightarrow & \dots \end{array}$$

Quindi l'insieme **N**, essendo in corrispondenza biunivoca con una sua parte, e' un insieme **infinito**.

Potevo metter in corrispondenza biunivoca i numeri di N con i loro tripli oppure con i loro multipli per 10... eccetera.

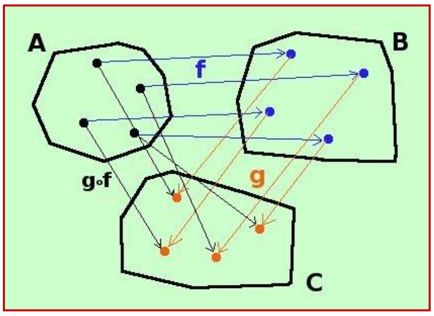
Questa di poter mettere in corrispondenza biunivoca un insieme infinito con una sua parte e' la prima fra le tante proprieta' sorprendenti dell'infinito, vedrai che, procedendo ci sara' di molto peggio....

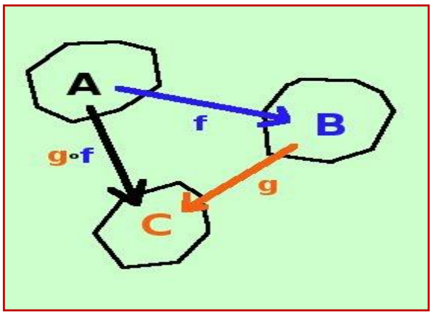
8. Applicazione composta

Consideriamo un'applicazione **f** da **A** a **B** e poi un'altra applicazione **g** da **B** a **C**. Allora se considero un'applicazione da **A** a **C** equivalente alle due applicazioni considerate (nel senso che fa corrispondere gli stessi elementi), essa sara' la loro composizione.
L'applicazione composta si indica con il simbolo:

$$g_o f \quad \text{oppure} \quad g(f)$$

Prima va la **g** e poi la **f** perche' l'applicazione **g** agisce sui termini del codominio dell'applicazione **f.**





9. Applicazione inversa

Quando considero un'applicazione da **A** a **B** trasformando gli elementi di **A** in elementi di **B** viene spontaneo cercare se e' possibile trovare l'applicazione inversa che va da **B** ad **A** e ritrasforma gli elementi di **B** negli elementi di **A** di partenza.

Data l'applicazione:

$$f : A \rightarrow B$$

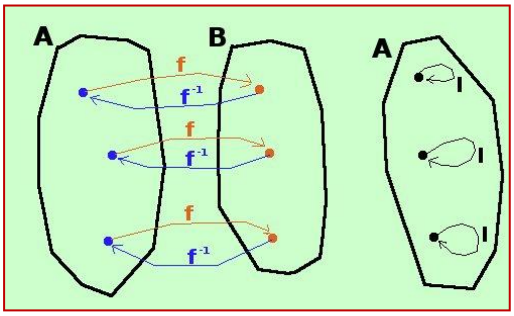
chiameremo applicazione inversa, se esiste, l'applicazione:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

tale che:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

essendo **I** l'applicazione identica che applica un insieme su se' stesso lasciando ogni elemento invariato:



A destra l'applicazione identica (risultato della composizione delle due applicazioni **f** ed **f**$^{-1}$) che trasforma ogni elemento in se' stesso.

Condizione perche' un'applicazione sia invertibile e' che sia biunivoca (o, se preferisci, biiettiva)