



LA LOGICA

La scienza che fornisce all'uomo gli strumenti per controllare la validità dei suoi ragionamenti.

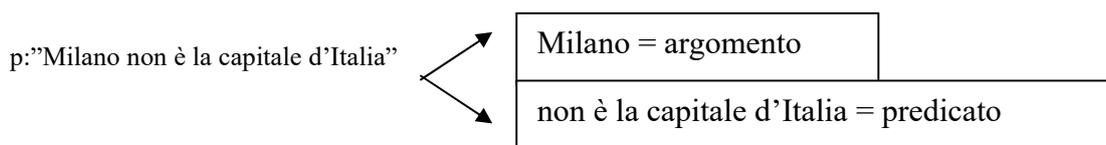
ENUNCIATI O PROPOSIZIONI: indicano affermazioni dichiarative di cui è possibile stabilirne la verità e la falsità indipendentemente da punti di vista soggettivi (gli enunciati si indicano sempre con lettere minuscole dell'alfabeto, dalla p in poi)

ESEMPIO:

è un enunciato: p: "Milano non è la capitale d'Italia" (dichiarativa, non soggettiva)

non è un enunciato: q: "i calciatori di serie A sono pagati molto" (dichiarativa e soggettiva)

Un enunciato è composto da un **argomento** e da un **predicato**



VALORI DI VERITA' di un enunciato: sono i termini primitivi **vero** o **falso**

ESEMPIO:

è un enunciato falso: Milano è la capitale d'Italia

è un enunciato vero: Milano è capoluogo

ENUNCIATI APERTI O P(x): indicano affermazioni dichiarative in cui l'argomento è indicato da un simbolo detto variabile che può assumere più valori di una stessa categoria (o appartenenti ad un insieme assegnato detto insieme di definizione), mentre il predicato è sempre lo stesso.

ESEMPIO: P(x): "x è un numero dispari" $x \in A = \{3, 5, 7, 11\}$
 x = variabile di A A = insieme di definizione

\in = APPARTIENE

Q(x): "x è un numero naturale" $x \in N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 x = variabile di N N = insieme di definizione



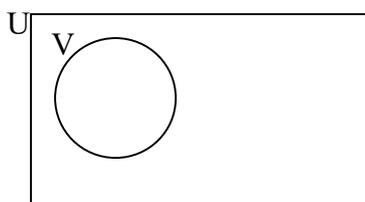
INSIEME DI VERITA' di un enunciato aperto = l'insieme dei valori per i quali l'enunciato aperto diventa un enunciato vero

ESEMPIO: $Q(x)$: "x è una lettera della parola ambasciatore"

Si determina, poiché non è stato assegnato l'insieme di definizione: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots\}$

Si determina l'insieme di verità dell'enunciato aperto: $V = \{a, b, m, s, r, e, t, i, o\}$

Si rappresentano graficamente i due insiemi con i diagrammi di Eulero-Venn



Dato un generico enunciato semplice p (gli enunciati si indicano sempre con lettere minuscole dell'alfabeto, dalla p in poi), per rappresentare i valori di verità di p si utilizza una tabella detta **TAVOLA DI VERITA'**, ovvero:

p
V
F

E' possibile studiare i valori di verità di due generici enunciati p e q in modo da poterli analizzare contemporaneamente. I quattro casi che si possono verificare, si possono facilmente leggere dalla seguente tavola di verità:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Questo tipo di rappresentazione è molto utile nello studio degli **ENUNCIATI COMPOSTI**.

I CONNETTIVI LOGICI: sono alcune congiunzioni del linguaggio naturale, tradotte in simboli, che servono a costruire enunciati composti di enunciati semplici.

Essi sono:

simboli

- | | | |
|--------------------------|----------------------|---------------|
| ➤ <u>la negazione</u> | non | \bar{p} |
| ➤ <u>la congiunzione</u> | e | \wedge |
| ➤ <u>la disgiunzione</u> | o | \vee |
| ➤ <u>la disgiunzione</u> | o | $\dot{\vee}$ |
| ➤ <u>l'implicazione</u> | se allora..... | \rightarrow |



LA NEGAZIONE: si ottiene negando un enunciato, ovvero da p si passa a \bar{p} e si legge *non p*

ESEMPIO:

$P(x)$: “ x è una vocale” $x \in \{a, c, e, f, q, u\}$

Enunciato vero se $x = a, e, u$

Enunciato falso se $x = f, q, c$

La sua negazione è:

$\bar{P}(x)$: “ x non è una vocale” $x \in \{a, c, e, f, q, u\}$

Enunciato vero se $x = c, f, q$,

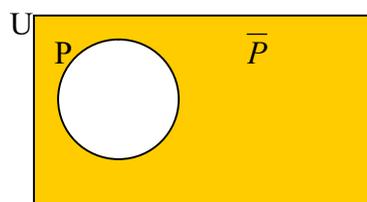
Enunciato falso se $x = a, e, u$

La tabella di verità della negazione logica è la seguente:

p	\bar{p}
V	F
F	V

DEF: La negazione di un enunciato p è \bar{p} , che è falso quando p è vero, ed è vero quando p è falso.

Dal punto di vista insiemistico, l'insieme di verità della negazione corrisponde al **complementare** dell'insieme di verità dell'enunciato di partenza.



$P(x)$: “ x è una vocale”

$\bar{P}(x)$: “ x non è una vocale”

$U = \{a, c, e, f, q, u\}$

$P = \{a, e, u\}$

$\bar{P} = \{c, f, q\}$

LA CONGIUNZIONE: si ottiene aggiungendo la congiunzione “e” tra due enunciati semplici, permettendo così la formazione di un enunciato composto, si legge **p e q** e simbolicamente si scrive **$p \wedge q$**

$\wedge = e$

ESEMPIO:

$P(x)$: “ x è una lettera della parola madre” $x \in \text{alfabeto}$

Enunciato vero se $x = m, a, d, r, e$

Enunciato falso se $x = c, f, o, p, q, \dots$

$Q(x)$: “ x è una lettera della parola padre” $x \in \text{alfabeto}$

Enunciato vero se $x = p, d, r, a, e$

Enunciato falso se $x = c, f, n, \dots$

La congiunzione logica tra p e q è:

$P(x) \wedge Q(x)$: “ x è una lettera della parola madre e della parola padre” $x \in \text{alfabeto}$

Enunciato vero se $x = a, e, r, d$

Enunciato falso se $x = m, p, f, \dots$

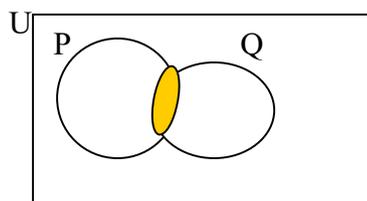


La tabola di verità della congiunzione logica è la seguente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DEF: La congiunzione tra due enunciati p e q è un enunciato $p \wedge q$ (si legge p e q) che è vero solo quando p e q sono veri contemporaneamente e falso in tutti gli altri casi.

Dal punto di vista insiemistico, l'insieme di verità della congiunzione corrisponde all'**intersezione** degli insiemi di verità dei due enunciati di partenza.



$P(x)$: "x è una lettera della parola madre"

$Q(x)$: "x è una lettera della parola padre"

$U = \{a, b, c, d, e, f, \dots\}$

$P = \{m, a, d, r, e\}$

$Q = \{p, a, d, r, e\}$

$P(x) \wedge Q(x)$: "x è una lettera della parola madre e padre"

$P \cap Q = \{a, d, r, e\}$

LA DISGIUNZIONE INLUSIVA: si ottiene aggiungendo la congiunzione "o" tra due enunciati semplici, permettendo così la formazione di un enunciato composto, si legge $p \vee q$ e simbolicamente si scrive $p \vee q$.

$\vee = \cup$

ESEMPIO:

$P(x)$: "x è una lettera della parola madre"

$x \in \text{alfabeto}$

Enunciato vero se $x = m, a, d, r, e$

Enunciato falso se $x = c, f, o, p, q, \dots$

$Q(x)$: "x è una lettera della parola padre"

$x \in \text{alfabeto}$

Enunciato vero se $x = p, d, r, a, e$

Enunciato falso se $x = c, f, n, \dots$

La disgiunzione logica tra p e q è:

$P(x) \vee Q(x)$: "x è una lettera della parola madre o della parola padre"

$x \in \text{alfabeto}$

Enunciato vero se $x = m, p, a, e, r, d$

Enunciato falso se $x = f, g, h, i, \dots$

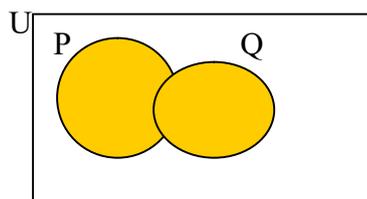
La tabola di verità della disgiunzione logica è la seguente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



DEF: La disgiunzione (inclusiva) tra due enunciati p e q è un enunciato $p \vee q$ (si legge p o q) che è falso solo quando p e q sono entrambi falsi e vero in tutti gli altri casi.

Dal punto di vista insiemistico, l'insieme di verità della disgiunzione corrisponde all'**unione** degli insiemi di verità dei due enunciati di partenza.



$P(x)$: "x è una lettera della parola madre"
 $Q(x)$: "x è una lettera della parola padre"
 $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots\}$
 $P = \{m, a, d, r, e\}$
 $Q = \{p, a, d, r, e\}$
 $P(x) \vee Q(x)$: "x è una lettera della parola madre o padre"
 $P \cup Q = \{m, p, a, d, r, e\}$

LA DISGIUNZIONE ESCLUSIVA: si ottiene aggiungendo la congiunzione "o...o" tra due enunciati semplici, permettendo così la formazione di un enunciato composto, si legge **o p o q** e simbolicamente si scrive $\dot{\vee}$.

$$\dot{\vee} = \text{O} \dots \text{O}$$

ESEMPIO:

$P(x)$: "x è una lettera della parola madre" $x \in \text{alfabeto}$
 Enunciato vero se $x = m, a, d, r, e$
 Enunciato falso se $x = c, f, o, p, q, \dots$

$Q(x)$: "x è una lettera della parola padre" $x \in \text{alfabeto}$
 Enunciato vero se $x = p, d, r, a, e$
 Enunciato falso se $x = c, f, n, \dots$

La disgiunzione logica tra p e q è:
 $P(x) \dot{\vee} Q(x)$: "x è o una lettera della parola madre o della parola padre" $x \in \text{alfabeto}$
 Enunciato vero se $x = m, p, a,$
 Enunciato falso se $x = d, r, e, \dots$

La tabella di verità della disgiunzione logica è la seguente:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DEF: La disgiunzione (esclusiva) tra due enunciati p e q è un enunciato $p \dot{\vee} q$ (si legge p o q) che è falso solo quando p e q sono entrambi falsi o entrambi veri.

Dal punto di vista insiemistico, l'insieme di verità della disgiunzione corrisponde all'**unione** degli insiemi di verità di $P-Q$ unito a $Q-P$.



$$U = \{a, b, c, d, e, f, \dots\}$$

$$P = \{m, a, d, r, e\}$$

$$Q = \{p, a, d, r, e\}$$

$$P(x) \vee Q(x) : \text{“}x \text{ è una lettera o della parola madre o padre”}$$

$$(P-Q) \cup (Q-P) = \{m, p, a, d, r, e\}$$

LA IMPLICAZIONE MATERIALE O CONDIZIONALE: si ottiene costruendo un enunciato composto aggiungendo il termine **SE** all’inizio ed il termine **ALLORA** tra i due enunciati semplici, si legge **se p allora q** e simbolicamente si scrive $p \rightarrow q$; si ottiene così una frase tipica come quella usata nei **TEOREMI**.

$\rightarrow =$ **ALLORA**

La tavola di verità è la seguente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

DEF: La implicazione tra due enunciati p e q è un enunciato $p \rightarrow q$ (si legge *se p allora q*) che è falso solo quando p è vero e q falso, vero in ogni altro caso.

IMPLICAZIONE CONTRARIA, INVERSA O CONTRONOMINALE

Data un’implicazione $p \rightarrow q$ si ha che:

- $\overline{p \rightarrow q}$ è l’implicazione contraria di $p \rightarrow q$
- $q \rightarrow p$ è l’implicazione inversa di $p \rightarrow q$
- $\overline{q \rightarrow p}$ è l’implicazione contro nominale di $p \rightarrow q$

**COIMPLICAZIONE MATERIALE O BICONDIZIONALE**

si ottiene costruendo un enunciato composto aggiungendo il termine **SE E SOLO SE** tra i due enunciati semplici, si legge **p se e solo se q** e simbolicamente si scrive $p \leftrightarrow q$; si ottiene così una frase tipica come quella usata nei **TEOREMI**.

 $\leftrightarrow = \text{SE E SOLO SE}$

La tavola di verità è la seguente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DEF: Si definisce complicazione materiale o bicondizionale di p e q , $p \leftrightarrow q$ (si legge **p se e solo se q**) la proposizione che è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità e falsa in caso contrario.